

APLICACIÓN DEL CÁLCULO FRACCIONAL A UNA SERIE DE TEMPERATURAS DE LA ZONA ANDINA.

Application of fractional calculus to a series of temperatures of the Andean zone.

¹Cristina Ramos Araujo*, ²Hitler Guerrero Hidalgo,

¹Escuela Superior Politécnica de Chimborazo ESPOCH, Riobamba, Ecuador

²Universidad Regional Amazónica IKIAM, Tena, Ecuador

*cristinaestefaniaramos@gmail.com

Resumen

Una aproximación para entender los fenómenos con dinámica compleja es el análisis de datos. El escalado multidimensional permite visualizar el comportamiento de los sistemas y capturar su evolución espaciotemporal. Mientras que el cálculo fraccional, aplicado mediante Fractional State Space Portrait permite identificar clústeres en grupos de datos, incluyendo variables meteorológicas como la temperatura. Para ello se ha utilizado la información mutua multivariante para encontrar el orden de derivada óptima que ha dado como resultado una visualización mejorada del sistema dinámico de temperaturas en 11 estaciones meteorológicas de la provincia de Chimborazo durante el año 2015. En el mapa del Fractional State Space Portrait se ha logrado identificar dos grandes clústeres que representan las dos estaciones típicas de un clima tropical ecuatorial. Tales clústeres se encuentran fuertemente influenciados por los diversos microclimas presentes en un territorio heterogéneo.

Palabras clave: Escalado Multidimensional, Retrato Fraccional Estado Espacial, Chimborazo.

Abstract

Data analysis is an approach to understand phenomena with complex dynamics. Multidimensional Scaling allows the visualization of systems behavior and also captures its space-time evolution. While fractional calculation, applied through Fractional State Space Portrait permits to identify clusters in data groups, including meteorological variables such as temperature. Aimed at this, the mutually multivariate information has been used to find the optimal derivative order that has resulted in an improved revealing of the dynamic temperature system in 11 meteorological stations in the province of Chimborazo during 2015. On the map of the State Space Fractional Portrait two large clusters that represent the two typical seasons of an equatorial tropical climate can be identified. Such clusters are strongly influenced by the numerous microclimates present in this heterogeneous territory.

Keywords: Multidimensional Scaling, Fractional State Space Portrait, Chimborazo.

Fecha de recepción: 27-08-2019

Fecha de aceptación: 25-06-2020

Fecha de publicación: 30-07-2020

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de datos ha sido empleado como herramienta en la investigación científica para entender la dinámica de fenómenos complejos mediante el uso de herramientas matemáticas y estadísticas. El escalado multidimensional

(MDS) permite visualizar el comportamiento de los sistemas y capturar la evolución espaciotemporal (1), (2). El método permite identificar diferentes particularidades de datos, agrupando con parámetros apropiados (3). Junto con la transformada de Fourier, MDS ha sido empleado para identificar patrones en variables económicas (4).

El cálculo fraccional (CF) amplía la perspectiva de las investigaciones, en donde se ha aplicado Fractional State Space Portrait (FSSP) para identificar clústeres en grupos de datos macroeconómicos y bursátiles (5). Sin embargo, la aplicación de estos métodos no se limita exclusivamente al campo económico, es aplicable en ciencias ambientales donde se requiera encontrar patrones que marquen trayectorias de comportamiento en sistemas dinámicos, tal es el caso de las variables meteorológicas como la temperatura, donde Machado sugiere adoptar la información mutua multivariante para proponer un orden de derivada óptima que ha dado como resultado una visualización mejorada del sistema dinámico de temperaturas en planeta Tierra. De manera análoga se ha podido aplicar el método para revelar patrones en otros sistemas dinámicos (6), (7), (8).

Ecuador es un país con gran potencial solar (9), el cual se encuentra atravesado de norte a sur por la cordillera de Los Andes que divide al país en regiones naturales. En la región montañosa de la sierra central se encuentra la provincia de Chimborazo, en donde se ha instalado una red de estaciones meteorológicas automáticas, las cuales han medido y transmitido datos atmosféricos desde su instalación en 2013. Desde entonces se han desarrollado estudios (10) y (11) en los cuales se han determinado las relaciones lineales empleando el coeficiente de Pearson y a la vez se han creado modelos para la estimación de otras variables meteorológicas (12). Sin embargo, el análisis de linealidad se vuelve insuficiente para comprender un sistema tan complejo como el meteorológico, para el cual se requiere establecer las relaciones ocultas entre sus diferentes variables.

Para tal propósito, los autores emplean el concepto de cálculo fraccional mediante el FSSP en una serie de temperaturas de 365 días del año 2015, procedente de 11 estaciones meteorológicas distribuidas en la provincia de estudio. Estos datos se interpretan como un sistema dinámico con evolución espaciotemporal correspondiente a cada estación durante el año de estudio, tales variables a su vez forman subsistemas relacionados entre ellos (6). Una vez obtenido el orden óptimo de la derivada, se realizó la comparación

entre FSSP y MDS para contrastar la representación visual del comportamiento dinámico del sistema.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

La provincia de Chimborazo está situada en la parte central de Ecuador. Su territorio se extiende en 6500 km² desde la región trópica a 156 metros sobre el nivel del mar hasta la cima del volcán Chimborazo a 6268 m.s.n.m. (13). Está atravesada por la Cordillera de los Andes y drenada por las subcuencas del río Guayas y el Pastaza. Una red de 11 estaciones meteorológicas automáticas ha sido instalada desde 2013 en toda la región. Las estaciones han medido datos como: temperatura del aire y suelo [°C], humedad relativa [%], presión atmosférica [hPa], radiación global y difusa [Wm⁻²], velocidad de viento [ms⁻¹]. La provincia de Chimborazo posee una topografía muy variable que, en conjunto con su ubicación en el centro del país, permite la formación de 13 ecosistemas (14) y de una diversidad de microclimas en los sitios donde se encuentran distribuidas las estaciones meteorológicas, el detalle de la ubicación puede ser observado en la Figura 1.

Para este estudio se ha elegido manejar promedios diarios de temperatura del aire [°C], para visualizar el comportamiento del clima en el año 2015. Esta selección tiene el 98.2% de los datos mientras que su complementario corresponde a datos faltantes. Se ha utilizado algunos modelos de transmitancia atmosférica y otros basados en imágenes satelitales creados para la zona Andina con el propósito de completar la información (10) y (11).

Los datos son interpretados como un sistema dinámico complejo de la evolución de las temperaturas a través del tiempo. Se considera la serie de tiempo de temperaturas en cada estación meteorológica i ($i=1,2,\dots,n$) como el estado de la variable $y_i(t)$ de un conjunto de $n=11$ subsistemas dinámicos posiblemente conectados, donde t representa el tiempo (6). En este estudio se utilizan métodos numéricos, estadísticos y computacionales para representar el comportamiento dinámico de las temperaturas aplicando dos distintos métodos de visualización MDS y FSSP.

Análisis de escalado multidimensional (MDS)

MDS es una técnica estadística utilizada para reducir la dimensión de datos multivariantes para obtener una representación espacial. Tiene una amplia aplicación en medicina, psicología, economía, geofísica y climatología (4), (5) y (6). En este método las similitudes entre pares de objetos son representadas por las distancias Euclidianas ecuación 1, también denominada solución clásica.

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} (x_{il} - y_{il})^2} \quad (1)$$

La interpretación de los resultados es la formación de conjuntos de acuerdo a la distancia entre los puntos en el mapa. Empleando software estadístico RStudio con paquetes adicionales se han generado gráficas interactivas en 2 y 3 dimensiones.

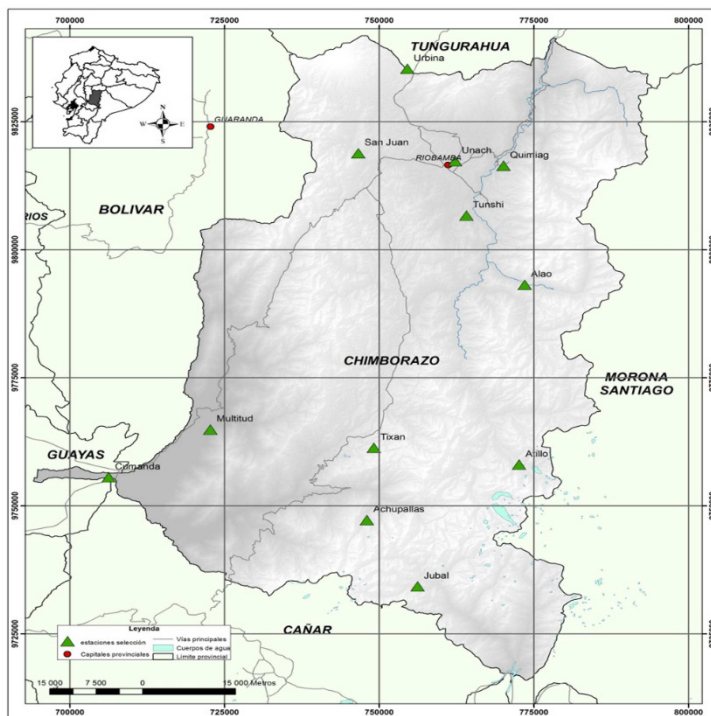


Figura 1. Ubicación de las estaciones meteorológicas en la provincia de Chimborazo

No	Nombre de la estación	Coordenadas (UTM-WGS84 Zona 17S)		Altura (m.s.n.m)
		E	N	
1	Alao	773499	9793173	3064
2	Atillo	772610	9758048	3467
3	Espoch	758398	9816965	2754
4	Matus	777564	9827892	2471
5	Multitud	722699	9764910	1483
6	Quimiag	770084	9816393	2709
7	San Juan	746596	9818849	3232
8	Tixan	749103	9761332	3546
9	Tunshi	764087	9806678	2840
10	Cumandá	706262	9755579	331
11	Urbina	754533	9835326	3642

Tabla 1. Ubicación de las estaciones en la provincia de Chimborazo

Un sistema k-dimensional se puede representar mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que rigen las k variables del estado $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$. Dichas ecuaciones se obtienen de la relación funcional entrada-salida del sistema para un conjunto dado de variables de estado. Conociendo $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ en

el momento $t \geq t_0$ y las entradas del sistema para $t \geq t_0$. El espacio de estado consiste en el conjunto de todos los estados posibles, cada uno correspondiente a un punto único. A medida que evoluciona, obtenemos secuencias de puntos que describen trayectorias en el espacio de estados el conjunto de las trayectorias es el SSP. Para los

sistemas de primero, segundo y tercer orden, se puede representar (SSP) y se puede inferir el comportamiento del sistema a partir de la correspondiente representación gráfica (5), (6) y (15).

Se ha utilizado series de tiempo $y_i(t)$ con sus derivadas de orden entero $(k-1)$, $k \in \mathbb{R}$ con respecto al tiempo, que se pueden denominar variables de fase. A continuación, se puede construir el SSP. La representación k -dimensional es compleja porque el orden hipotético del modelo diferencial es desconocido. Se necesita determinar el orden óptimo de las derivadas con respecto al tiempo. Se conoce que los datos atípicos k -dimensionales son difíciles de separar en una base de datos (16) (17), lo cual conlleva a un trabajo exhaustivo para calcular las distancias entre cada par de variables y a la vez aplicar alguna técnica para detectar valores anómalos multivariantes. Para tal efecto, se ha aplicado diferencias numéricas para datos o funciones ruidosas, empleando el algoritmo propuesto por Holoborodko (18) donde h es el periodo de muestra.

$$y'(t) = \frac{1}{8h} \{2[y(t+h) + y(t-h)] + y(t+2h) - y(t-2h)\} \quad (2)$$

$$y''(t) = \frac{1}{4h^2} \{2[y(t+2h) + y(t-2h)] - 2y(t)\} \quad (3)$$

Medida de información mutua.

Como parte de la Teoría de Información se puede encontrar la definición de la Información Mutua de variables que mide la dependencia estadística mutua entre dos variables aleatorias. La Información mutua de dos variables aleatorias discretas X, Y se define como (19):

$$I(X, Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log \left[\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right] \quad (4)$$

Donde $p(x)$, $p(y)$ representan las probabilidades marginales de las variables aleatorias X, Y , además $p(x, y)$, representa la distribución conjunta de las variables aleatorias X, Y . (6), (20). Para el presente artículo se utiliza la Información Mutua Normalizada en referencia a (21):

$$NI(X, Y) = \frac{I(X, Y)}{\sqrt{H(X)H(Y)}} \quad (5)$$

Donde $H(X)$ y $H(Y)$, representan la entropía.

$$H(X) = - \sum_{x \in X} p(x) \log p(x) \quad (6)$$

La información mutua normalizada tiene la ventaja de simplificar la comparación entre diferentes condiciones y mejorar la sensibilidad.

Cálculo fraccional (CF)

El CF puede ser empleado como una extensión del Cálculo Diferencial e Integral. En la siguiente ecuación $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$, p puede tomar cualquier valor, sea este positivo, negativo, real o imaginario; entonces se convierte en un poderoso recurso para el análisis de datos (22).

En este estudio se ha empleado cálculo numérico y analítico para resolver un sistema fraccional. Se menciona la ecuación diferencial de orden fraccionario en ecuación 7.

$$a_2 y^\alpha(t) + a_1 y^\beta(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (7)$$

Con condiciones iniciales $y^\beta(0)=0$; $y(0)=0$

Como una aproximación de las derivadas fraccionales de la ecuación 5 se utiliza métodos numéricos en relación a la ecuación 7 con el principio de "memoria a corto plazo" formulada por (23)

$$y^{(\alpha)}(t) \approx {}_{(t-L)}D_t^\alpha y(t) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N(t)} b_j(t-jh) \quad (8)$$

Donde L es la longitud de memoria y h es la frecuencia de tiempo.

$$N(t) = \min \left\{ \left\lceil \frac{t}{h} \right\rceil, \left\lceil \frac{L}{h} \right\rceil \right\} \quad (9)$$

El coeficiente binomial está dado por $b_j = \left(1 - \frac{1+\alpha}{m}\right) b_{j-1}$ donde $b_0=1$

Favorablemente, según (23), también se puede calcular una aproximación de un sistema dinámico fraccional con sistemas de tipo entero de la siguiente manera en la ecuación 7.

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (10)$$

Los coeficientes de a^i_k del sistema dinámico de orden entero toman los siguientes valores $a^i_2=0.7414$; $a^i_1=0.2313$; $a^i_0=1$ que han sido calculados por el método de mínimos cuadrados $\sum_{j=0}^m (y_j^f - y_j^i)^2 \rightarrow \min$

Fractional state space portrait (FSSP)

Para la construcción del FSSP el orden de la derivada no se limita a un número entero, proporcionando una alternativa valiosa para obtener la representación de las relaciones entre las variables del sistema k-dimensional, visualizando características escondidas y no capturadas por otros métodos (8).

Como primer paso para construir el FSSP se calcula el orden óptimo de la derivada, para el sistema dinámico (6). Posteriormente se emplea las ecuaciones 8 y 9 para obtener la representación del cambio de estado de cada variable.

Una vez obtenidas, las gráficas arrojadas por MDS y FSSP se comparan buscando la representación adecuada.

III. RESULTADOS

Análisis de Escalado Multidimensional

El conjunto de datos es representado por las mediciones de temperatura de 365 días en el año 2015 en una proyección de escalado multidimensional para $u = 2$ que se muestra en la Figura 2, donde cada punto representa las mediciones de la temperatura durante un tiempo t .

Las distancias cortas entre dos puntos en el mapa significan que las correspondientes mediciones son similares, mientras que las distancias largas entre los puntos representan menor similitud entre sí.

La Figura 3 muestra el escalado multidimensional para $u = 3$, donde se puede apreciar dos grupos semi definidos que representan las dos estaciones del año típicas de la zona ecuatorial: los días secos y lluviosos representados con puntos rojos y azules respectivamente.

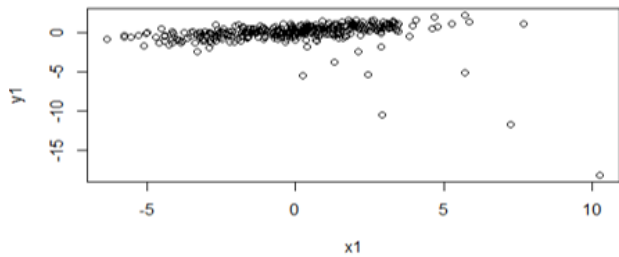


Figura 2. Escalado multidimensional para $u=2$

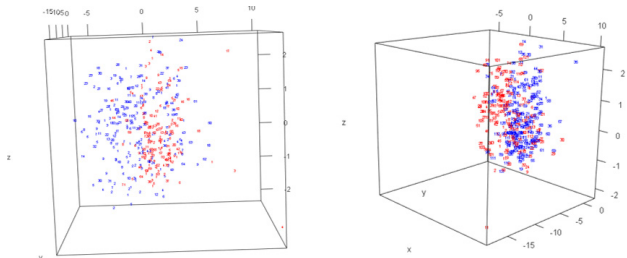


Figura 3. Escalado multidimensional para $u=3$

En la Figura 4 se observa el gráfico Sherpad en 2 dimensiones, donde se identifica que las similitudes y las distancias tienen una fuerte relación. El coeficiente de determinación $R^2=0.89$, que significa que el 89% de la variabilidad de las distancias y las similitudes está explicada. Se ha obtenido la estructura de mejor ajuste de los puntos de análisis MDS, el cual tiene el menor estrés a medida que las dimensiones aumentan como se observa en la Figura 5.

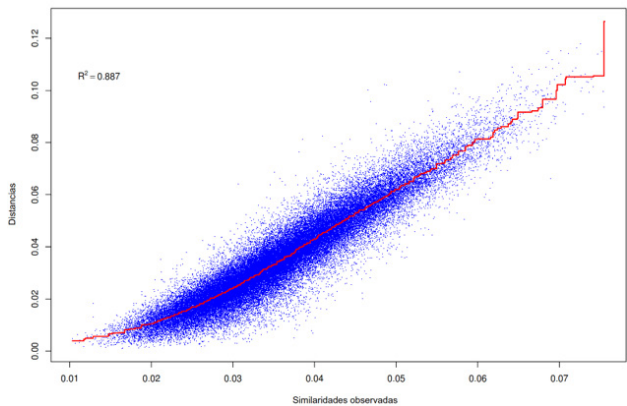


Figura 4. Sherpad Plot.

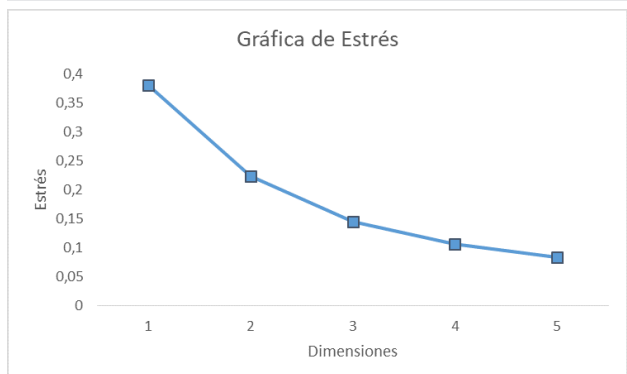


Figura 5. Gráfica de Estrés.

Análisis SSP

Se ha generado el SSP de la serie de tiempo de temperaturas, se observa en la Figura 6 que la variable es una serie estacionaria anual. Sin embargo utilizando las ecuaciones 2 y 3 se puede observar el cambio de estados $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$ de las temperaturas plasmado en la Figura 7. La periodicidad no es evidente durante los cambios de estado representados en la gráfica.

Análisis FSSP

Para determinar el orden de las derivadas del FSSP para la i_{th} estación meteorológica, se ha comparado $s=72$ valores de orden α de $D_t^\alpha \{y_i(t)\}$ que corresponden a discretizaciones numéricas en un intervalo de $\alpha \in [0;2]$. Para llevar a cabo este procedimiento primero se ha calculado la Información mutua multivariante descrita por (24).

$$I_{pqr}(X, Y, Z) = I_{pqr}(D_t^{\alpha_p}, D_t^{\alpha_q}, D_t^{\alpha_r}) \quad (11)$$

$$I_{pqr}(X, Y, Z) = I(D_t^{\alpha_p}, D_t^{\alpha_q}) - I(D_t^{\alpha_p}, D_t^{\alpha_q} / D_t^{\alpha_r}) \quad (12)$$

Como segundo paso se elige el orden óptimo de derivada que corresponde al mínimo valor de $I_{pqr}(X, Y, Z)$, como lo sugiere Machado (6). Se observa en la Figura 8 la gráfica para tres dimensiones del FSSP para el óptimo orden de derivada $\{\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r\} = \{0.02; 0.70; 1.52\}$. Los gráficos presentan una semejanza con los obtenidos empleando órdenes entero en la Figura 7.

Los grupos obtenidos por los dos métodos son aparentemente similares, sin embargo, la gráfica del FSSP (Figura 9) representa grupos de temperatura mejor definidos; de esta manera, el método FSSP se presenta como una buena alternativa para discretizar variables meteorológicas como temperaturas.

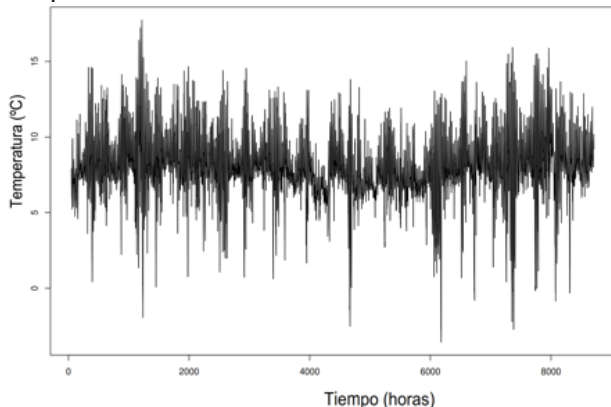


Figura 6. Temperaturas en función del tiempo.

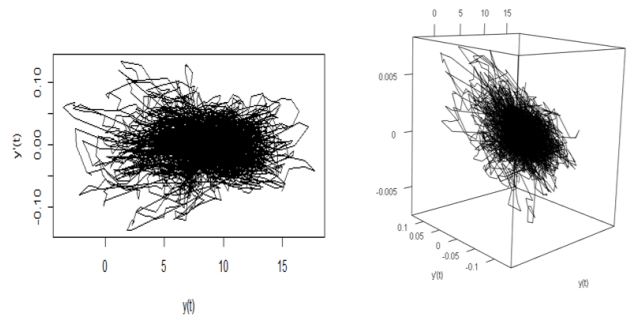


Figura 7. SSP de la Estación Atillo.

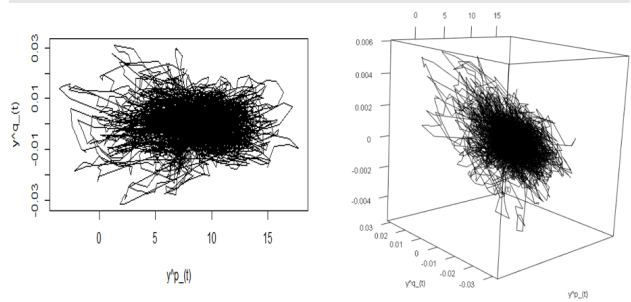


Figura 8. FSSP Temperaturas Atillo

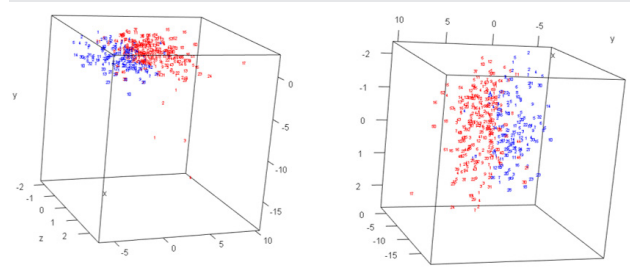


Figura 9. Representación de los clusters basados en $\{\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r\} = \{0.02; 0.70; 1.52\}$, para $n=11$ estaciones meteorológicas.

IV. DISCUSIÓN

Para la construcción del FSSP se ha obtenido el óptimo orden de derivada $\{\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r\} = \{0.02; 0.70; 1.52\}$ en comparación con Machado (6) $\{\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r\} = \{0.029; 0.53; 1.33\}$. Los valores no tienen una diferencia significativa entre sí, pero se obtiene un criterio de visualización de comportamiento de las Temperaturas.

En el mapa FSSP (Figura 9), se puede apreciar dos grupos que representan las dos estaciones del año definidas para la zona ecuatorial: los días secos en rojo y los días lluviosos en azul. Las temperaturas en climas tropicales se caracterizan por tener variaciones diarias más grandes que las variaciones anuales. Esto es típico en el Ecuador que no posee estaciones termales, además carece de un invierno largo en el cual la actividad biológica se reduzca por las temperaturas bajas. La cordillera de los Andes es el factor más influyente que genera complejos patrones espaciales de pre-

precipitación, afectadas por las cuencas del Pacífico y del Amazonas. Las masas de aire provenientes del Océano Pacífico ejercen su influencia en las laderas occidentales de la cordillera, mientras que las pendientes orientales están dominadas por corrientes de aire húmedo que provienen del Atlántico y la cuenca del Amazonas (25), (26). En los valles interandinos las masas de aire oceánicas y continentales se encuentran, formando dos estaciones climáticas en la zona: días lluviosos de febrero a mayo y octubre y noviembre; días secos en el periodo de junio a septiembre, el cual es más pronunciado que el segundo periodo alrededor de diciembre (25).

La provincia de Chimborazo no se caracteriza por su uniformidad topográfica, altitudinal, ni climática. Su configuración biogeográfica hace posible la formación de 13 ecosistemas en su territorio (14). La formación de microclimas con diferente precipitación y humedad relativa permite que no se observe una diferenciación muy marcada entre las estaciones, lo cual es visible en la Figura 9, donde los clústeres se encuentran muy cercanos entre sí.

V. CONCLUSIONES

Al aplicar el Análisis de Escalado Multidimensional se ha podido identificar dos grupos no delimitados, los cuales se les ha asociado a días

secos y lluviosos. La gráfica de Sherpad indica que el 89% de la variabilidad de los datos están explicados por el modelo en tres dimensiones.

Se compararon los 72 valores de orden α que corresponden a discretizaciones numéricas en un intervalo $\alpha \in [0,2]$. De la comparación se ha empleado los valores menores resultantes. Estos valores forman el orden de derivada óptimo para la construcción del FSSP. Se ha comparado con el orden de derivada entero y se ha determinado que no tienen una diferencia significativa.

La aplicación de FSSP funciona como una herramienta útil para discretizar el conjunto de datos y mejorar la representación visual del sistema dinámico. Al comparar la Figura 3 con la Figura 9, en esta última se puede observar con mayor claridad dos grupos: días secos y días lluviosos; el mejor método evaluado en el estudio para interpretar el sistema dinámico de las temperaturas de 11 estaciones meteorológicas en la provincia de Chimborazo en el año 2015 es el FSSP.

VI. AGRADECIMIENTOS

Al Centro de Energías Alternativas y Ambiente CEAA ESPOCH por proporcionar los datos empleados para la presente investigación.

Al Dr. Krisztián Kósi Ph.D. y al Prof. Dr. habil. József K. Tar D.Sc. quienes colaboraron con sus conocimientos.

Referencias

1. Tenreiro Machado J, Lopes AM, Galhano AM. Multidimensional scaling visualization using parametric similarity indices. *Entropy*. 2015; 17(4): p. 1775-1794.
2. Huang JJ, Tzeng GH, Ong CS. Multidimensional data in multidimensional scaling using the analytic network process. *Pattern Recognition Letters*. 2006; 26(6): p. 755-767.
3. Kósi K. Method of data center classifications. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2012; 9(4): p. 127-137.
4. Machado JT, Duarte FB, Duarte DM. Analysis of financial data series using fractional fourier transform and multidimensional scaling. *Nonlinear Dynamics*. 2011; 65(3): p. 235-245.
5. Machado , Mata ME, Lopes AM. Fractional state space analysis of economic systems. *Entropy*. 2015; 17(8): p. 5402-5421.
6. Machado J, Lopes AM. Fractional state space analysis of temperature time series. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2015; 18(6): p. 1518-1536.
7. Namias V. The fractional order Fourier transform And its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1980; 25(3): p. 241-265.
8. Lopez A, Tenreiro Machado J. State space analysis of forest fires. *Journal of Vibration and Control*. 2016; 22(9): p. 2153-2164.

9. Baigorria GA, Villegas EB, Trebejo I, Carlos JF, Quiroz R. Atmospheric transmissivity: distribution and empirical estimation around the central andes. *International Journal of Climatology*. 2004; 24(9): p. 1121–1136.
10. Recalde C, Cisneros C, Vaca D, RAMOS C. Relación de la transmitancia atmosférica con la heliofanía y la diferencia de temperaturas extremas diarias en la zona ecuatorial andina. *Información tecnológica*. 2015; 26(1): p. 143–150.
11. Ramos C, Perez N, Villacreses G, Vaca D, Chavez E, Perez M. Atmospheric transmissivity: a model Comparison for equatorial andean highlands zone. *Perfiles*. 2016; 2(16): p. 6-13.
12. Haro S, Escudero A. Interpolación de datos faltantes mediante splint cúbico y mínimos cuadrados. *Perfiles*. 2017; 1(17): p. 63-66.
13. Instituto Geofísico de la Escuela Politécnica Nacional. Instituto Geofísico - EPN. [Online].; 2019 [cited 2019 10 07. Available from: HYPERLINK "<https://www.igepn.edu.ec/chimborazo>" <https://www.igepn.edu.ec/chimborazo> .
14. Ministerio de Ambiente Ecuador. Subsecretaría de Patrimonio Natural. [Online].; 2013 [cited 2019 10 07. Available from: HYPERLINK "<http://app.sni.gob.ec/sni-link/sni/PDOT/NIVEL%20NACIONAL/MAE/ECOSISTEMAS/DOCUMENTOS/Sistema.pdf>" <http://app.sni.gob.ec/sni-link/sni/PDOT/NIVEL%20NACIONAL/MAE/ECOSISTEMAS/DOCUMENTOS/Sistema.pdf> .
15. Willems JC, Polderman JW. *Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach*. Springer Science & Business Media. 2013; 26.
16. Craven P, Wahba G. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*. 1978; 31(4): p. 377–403.
17. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electronic transactions on numerical analysis*. 1997; 5(1): p. 1-6.
18. Holoborodko P. Pavel Holoborodko, *Applied Mathematics and more*. [Online].; 2008 [cited 2018 Octubre 1. Available from: HYPERLINK "<http://www.holoborodko.com/pavel/numerical-methods/numerical-derivative/smooth-low-noise-differentiators/>" <http://www.holoborodko.com/pavel/numerical-methods/numerical-derivative/smooth-low-noise-differentiators/> .
19. Jaynes E. Information theory and statistical mechanics. *Physical review*. 1957; 106(4): p. 620-630.
20. Pham TH, Ho TB, Nguyen QD, Tran DH, Nguyen VH. Multivariate Mutual Information Measures for Discovering Biological Networks. In 2012 IEEE RIVF International Conference on Computing & Communication Technologies, Research, Innovation, and Vision for the Future; 2012; Ho Chi Minh City, Vietnam. p. 1-6.
21. Strehl A, Ghosh J. Cluster ensembles—a knowledge reuse framework for combining multiple partitions. *Journal of machine learning research*. 2002; 3: p. 583–617.
22. Ylheng W, Yuquan C, Songsong C, Yong W. Discussion on fractional order derivatives. *IFAC-PapersOnLine*. 2017; 50(1): p. 7002-7006.
23. Dorcak L. Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems. *arXiv preprintmath/0204108*. 2002.
24. Srinievasa S. A review on multivariate mutual information. In *Univ. of Notre Dame*; 2005; Notre Dame, Indiana. p. 1-6.
25. Vuille , Bradley RS, Keimig F. Climate variability in the andes of ecuador and its relation to tropical pacific and atlantic sea surface temperature anomalies. *Journal of Climate*. 2000; 13(14): p. 2520–2535.
26. Bendix J, Lauer W. Die niederschlagsjahreszeiten in ecuador und ihre klimadynamische interpretation (rainy seasons in ecuador and their climate-dynamic interpretation). *Erdkunde*. 1992; p. 118–134.