FIBONACCI Y LA RAZÓN ÁUREA

Dr. Baldovino Lamirata Carigli

Facultad de Ciencias, ESPOCH
baldovinol@hotmail.com

Resumen

En el artículo se muestra que la relación existente entre los números de Fibonacci y la razón áurea es que la sucesión de las razones de dos sucesivos números de Fibonacci converge justo al valor de la razón áurea.
Además se justifica la importancia de la razón áurea por sus innumerables aplicaciones operadas tanto en la naturaleza misma como por el hombre.

Palabras claves: Números de Fibonacci, razón áurea

Abstract

The article shows that the relationship between Fibonacci numbers and the golden section is that the sequence of ratios of two successive Fibonacci numbers converges fair value of the golden ratio.
It also justifies the importance of the golden section for countless applications operated by the very nature and by man.

Keywords: Fibonacci number, golden ratio

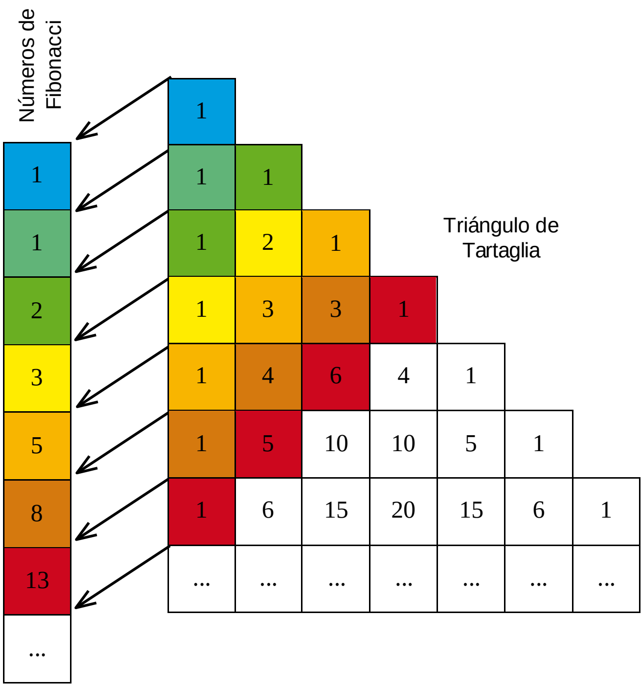


Figura 1. Números de Fibonacci frente Triángulo de Tartaglia

INTRODUCCIÓN

En el artículo titulado "La Sucesión de Fibonacci" presentado en la revista *Nuestra Ciencia* n.º 8, de 2006, de la Facultad de Ciencias de la PUCE, aseveré que los números de Fibonacci y la razón áurea tienen mucho en común. Continúo entonces esta reflexión, recomendando a los interesados leer aquel artículo; de manera que supongo conocidos los números de Fibonacci y algunas de sus propiedades, descritas allí.

1. LA SUCESIóN DE LAS RAZONES Rn

Por comodidad del lector, se reportan los primeros términos de la sucesión de Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144…

Excepto por los dos primeros términos, no se necesita recordar los otros porque son la suma de los dos anteriores:

$$Fn = F_{n-1} + F_{n-2} \quad , \quad n > 2$$

Obsérvese que los números de Fibonacci también se pueden construir empleando el Triángulo de Tartaglia, como se muestra en la figura 1.

Construyamos ahora las razones entre un término y el siguiente:

$$1 \quad \frac{1}{2} \; \frac{2}{3} \; \frac{3}{5} \; \frac{5}{8} \; \frac{8}{13} \; \frac{13}{21} \; \frac{21}{34} \; \frac{34}{55} \; \frac{55}{89} \; \frac{89}{144}$$

cuyo valor en notación decimal es:

1 0,5 $0,\overline{6}$ 0,6 0,625 0,615… 0,619... 0,617… 0,6188… 0,6179… 0,61805…

Estas razones tienden a estabilizarse alrededor de un valor poco superior a 0,6. Encontrémoslo.
Hay una fórmula recursiva para generar las fracciones. Indiquemos por R_{n+1} la razón entre el número (n+1)-ésimo y el (n+2)-ésimo de Fibonacci; se cumple:

$$R_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} = \frac{1}{\frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{1}{1 + R_n}$$

Al poner:

$$\begin{cases} R_o = 1 \\ R_{n+1} = \dfrac{1}{1 + R_n} \end{cases}$$

resulta:

$$R_0 = 1 \quad , \quad R_1 = \frac{1}{1 + R_0} = \frac{1}{1 + 1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + R_1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} \quad , \quad R_3 = \frac{1}{1 + R_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}$$

Se genera una fracción continua[1] que converge al límite de las razones entre los sucesivos números de Fibonacci. El número a así definido:

$$a = \frac{1}{1 + a}$$

genera por sustitución repetida la siguiente fracción continua:

$$a = \frac{1}{1 + a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + a}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + a}}} = \ldots$$

y por supuesto es el límite de la fracción misma.
Ahora bien, esta fracción continua converge al mismo valor de la sucesión de las razones R_i y por tanto a es el límite de las razones entre los sucesivos números de Fibonacci:

$$a = \lim_{n \to \infty} R_n$$

El valor a se calcula en el modo siguiente. Se cumple:

$$a(1 + a) = 1$$

luego:

$$a^2 + a - 1 = 0$$

1. Es decir, una expresión que en general tiene la forma:

$$a_0 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ldots}}}}$$

siendo los a_i enteros positivos.

luego:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por ser a el límite de una sucesión de términos positivos, su valor no puede ser negativo, luego queda la sola solución positiva:

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \qquad (1)$$

2. LA RAZÓN ÁUREA

Existe un rectángulo tan armónico que se merece el calificativo de "áureo": es el que tiene las medidas de los lados en una razón especial, indicada por φ, la inicial del artista ateniense Fidia, que vivió en el siglo V antes de Cristo.

El rectángulo aparece en las construcciones griegas que se consideran "bellas", como el Partenón en Atenas y el templo de Poseidón en Phestum, como también en las esculturas y en la naturaleza.

La razón áurea φ es la media proporcional entre un segmento y la parte que queda.

Se construye de la manera siguiente. Dado el segmento AB, se traza la circunferencia de diámetro igual a AB y tangente al segmento en B, luego se traza la secante por A y por el centro C de la circunferencia:

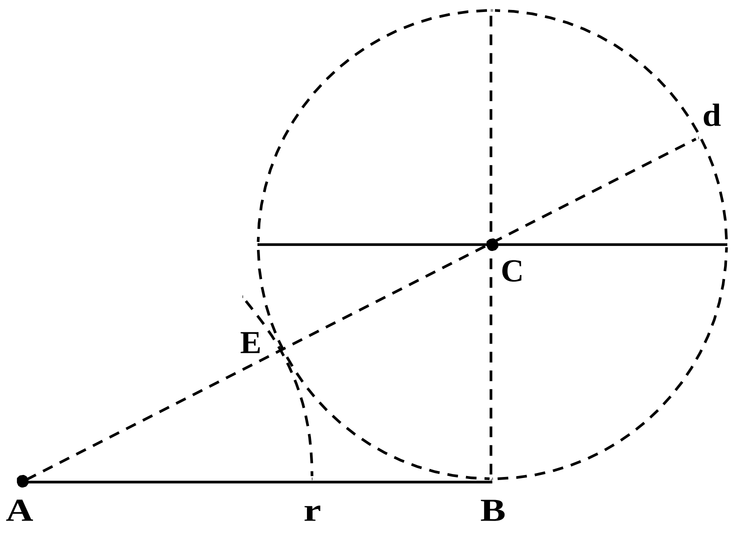


Figura 2. Construcción de la razón áurea

Se prueba que AB es la media proporcional entre toda la secante AD y la parte externa AE:

AD : AB = AB : AE.

y por tanto:

(AE + ED) : AB = AB : AR.

Sigue:

(AE + ED − AB) : AB = (AB − AR) : AR → AR : AB = RB : AR → AB : AR = AR : RB

luego AR es la razón áurea de AB. Por ende, el siguiente es un rectángulo áureo:

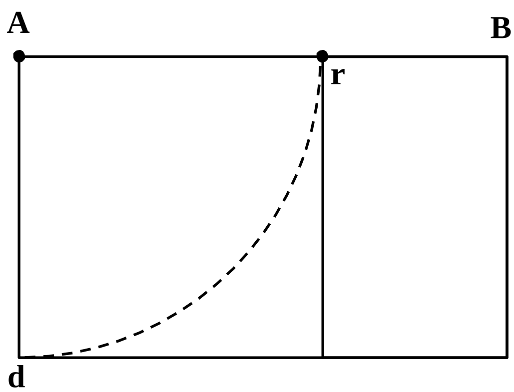


Figura 3. Rectángulo áureo

Si se asume igual a 1 la medida del segmentoAB,es:

$$1 : \varphi = \varphi : 1 - \varphi.$$

Sigue:

$$\varphi^2 = 1 - \varphi$$

luego:

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0.$$

Por (1), el número positivo que soluciona a esta ecuación es $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

ISSN 1390-5740
ISSN 2477-9105
Número 12 Vol. 2 (2014)

Por ende:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Por ende, el rectángulo áureo de base AB tiene altura AD = $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ AB.

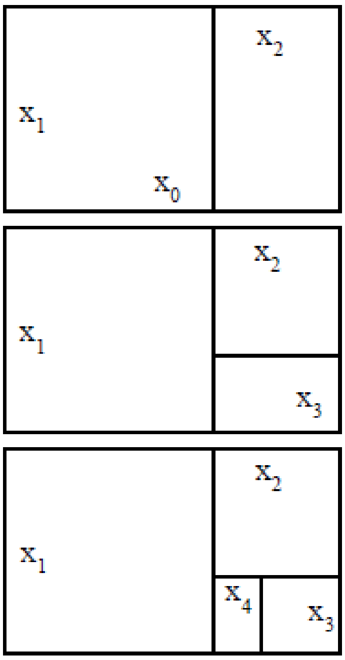
Y aquí el nexo entre los números de Fibonacci y la razón áurea:

la sucesión de las razones rn de los números de fibonacci converge a la razón áurea φ.

Otra característica: considérese un rectángulo de medidas x_0 y x_1, con $x_1 < x_0 < 2x_1$. Entonces se puede trazar en el interior del rectángulo un cuadrado de lado de longitud x_1 y queda un rectángulo de lado mayor de longitud x_1 y de lado menor de longitud $x_2 = x_0 - x_1$.

Si $x_2 < x_1 < 2x_2$, se puede trazar en el interior del segundo rectángulo un cuadrado de lado de longitud x_2 y queda un rectángulo de lado mayor de longitud x_2 y de lado menor de longitud $x_3 = x_1 - x_2$.

Si $x_3 < x_2 < 2x_3$, se puede trazar en el interior del tercer rectángulo un cuadrado de lado de longitud x_3 y queda un rectángulo de lado mayor de longitud x_3 y el menor de longitud x_4



Generalmente este proceso de construcción de rectángulos y cuadrados acaba. ¿Hay un valor de la razón entre las medidas del rectángulo dado: x_0/ x1, por el cual el proceso no tenga fin?

Obtengamos una expresión recursiva de x_n. Considérense las dos soluciones de la ecuación $a^2 + a - 1 = 0$, que como ya sabemos son:

$$a_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1 \quad , \quad a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < -1$$

y el sistema en las incógnitas X, Y:

$$\begin{cases} X + Y = x^0 \\ a_1 X + a_2 Y = x_1 \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$X = \frac{x_0 a_2 - x_1}{a_2 - a_1} \quad ; \quad X = \frac{x_1 - x_0 a_1}{a_2 - a_1}$$

Como $1 - a_1 = 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. $(a_1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, se cumple:

$$1 - a_1 = (a_1)^2$$

y como $1 - a_2 = 1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. $(a_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; se cumple:

$$1 - a_2 = (a_2)^2$$

Luego:

$$x_0 = X + Y = a_1^0 X + a_2^0 Y$$

$$x_1 = a_1 X + a_2 Y = a_1^1 X + a_2^1 Y$$

$$x_2 = x_0 - x_1 = X + Y - a_1 X - a_2 Y = (1 - a_1)X + (1 - a_2)Y = a_1^2 X + a_2^2 Y$$

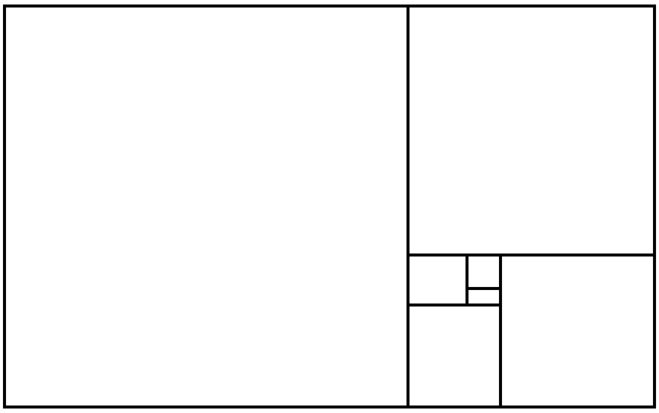
$x_3 = x_1 - x_2 = a_1 X + a_2 Y - a_1^2 X - a_2^2 Y = (a_1 - a_1^2)X + (a_2 - a_2^2)Y = a_1^3 X + a_2^3 Y$

…

$x_n = x_{n-2} - x_{n-1} = a_1^{n-2} X + a_2^{n-2} Y - a_1^{n-1} X - a_2^{n-1} Y = (a_1^{n-2} - a_1^{n-1})X + (a_2^{n-2} - a_2^{n-1})Y = a_1^n X + a_2^n Y$

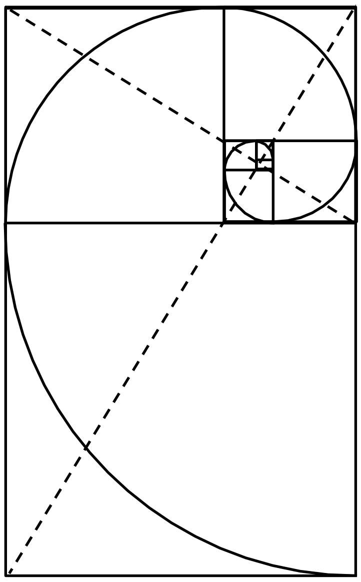
…

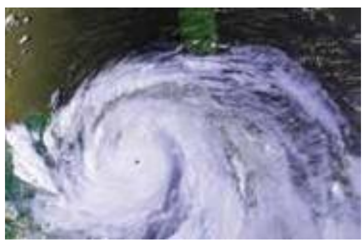
Para que el proceso de recorte sea infinito, los x_n tienen que seguir siendo positivos. Ellos son iguales a la suma $a_{1n} X + a_{2n} Y$ de la cual el primer sumando siempre es positivo y menor que X, el segundo es alternativamente positivo y negativo según el valor de n, mayor que Y y creciente en valor absoluto con n. Entonces para que los x_n sean todos positivos, debe ser Y = 0, luego debe ser x1 = a11X = a1x0, esto es, la altura del rectángulo debe ser la razón áurea de la base, o sea el rectángulo debe ser áureo.



Una última nota. ¿Por qué a la razón áurea se la llama así? Hasta la llamaron "la divina proporción". Es que ella está presente en muchas obras de la naturaleza y del hombre.
Vimos que a partir de un rectángulo áureo, recortando un cuadrado de lado igual al lado menor, se obtiene un rectángulo más pequeño símil al primero, luego áureo; del cual recortando un cuadrado de lado igual al lado menor, se obtiene un tercer rectángulo aun más pequeño, símil a los anteriores, luego áureo; y así sucesivamente.
Asimismo, construyendo sobre el lado mayor del primer rectángulo un cuadrado, este determina con el primer rectángulo áureo todavía un rectángulo áureo, sobre el cual operando de manera análoga se obtiene todavía un rectángulo áureo más grande, y así sucesivamente.
Ahora, construyendo los rectángulos siempre de la misma parte, los puntos de corte a, b, d, e, f, g, h… pertenecen a una espiral logarítmica, con el polo punto de intersección de la diagonal común a los rectángulos horizontales con la diagonal común a los rectángulos verticales. Esta espiral logarítmica especial se llama espiral áurea.

Se construye una parte conectando los vértices opuestos de todos los cuadrados obtenidos mediante arcos de circunferencia.
Es una de las espirales arquetipo de galaxias, formaciones huracanadas, conchas:

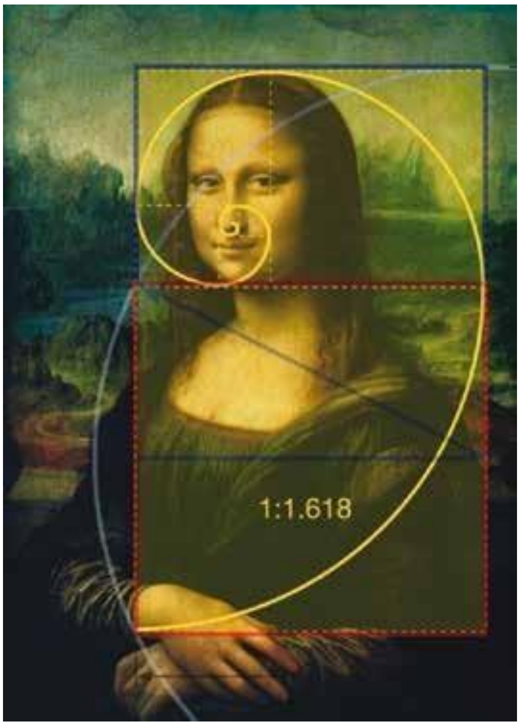


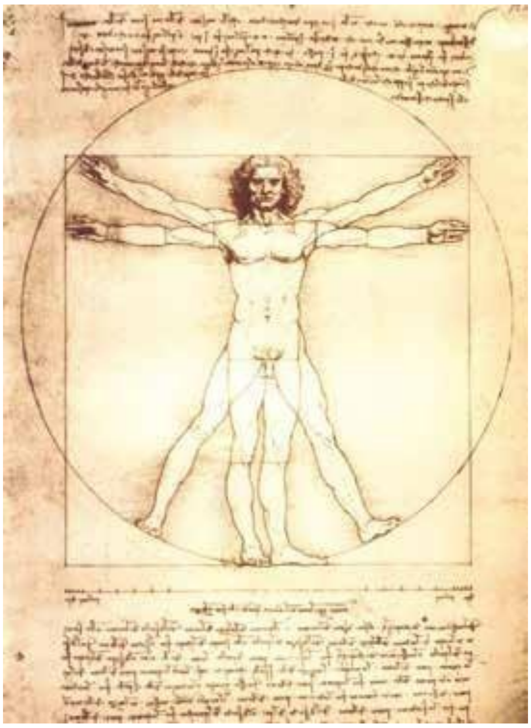


Asimismo, si contamos las hojas sucesivas de un tallo hasta encontrar una con la misma orientación de la primera, el número que se obtiene es un número de Fibonacci. Finalmente, la razón áurea está presente en muchas obras arquitectónicas y en el arte, como demostración de que los grandes artistas conocen la Geometría:

RECOMENDACIONES

En la Red hay muchos sitios que hablan acerca de la sucesión de Fibonacci y de la razón áurea. Para ampliar o profundizar estas notas, se recomienda a estudiantes, arquitectos, profesionales de la imagen visitar los sitios que aparecen en la bibliografía.





Bibliografía complementaria

1. Corbalán F. La Proporción Áurea. RBA Coleccionables S. A.; 2010.
2. Ghyka M. El número de Oro. I Los Ritmos. II Los Ritos. Madrid, España: Ediciones Apóstrofe, S. L.; 2006.
3. Ghyka M. La Divina Proporción. Tres Cantos. Ediciones Akal, S. A.; 1991.